1- $(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$

2- $(\text{non}(P \text{ ou } q)) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{q})$

3- $(\text{non}(P \text{ et } q)) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } q))$

4- $(\text{non } (P \Rightarrow q)) \Leftrightarrow P \text{ et } \bar{q}$

$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$

$A^c = C_E^A = \bar{A}$

$A \setminus B \ (\text{ou } A-B) = A \cap B^c$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$((A \subset C) \text{ et } (B \subset C)) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$

$((C \subset A) \text{ et } (C \subset B)) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$

$(A \subset B) \Rightarrow (C \setminus B) \subset (C \setminus A)$

$(A \subset B) \Rightarrow (A \setminus C) \subset (B \setminus C)$

$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Relation d'équivalence :

R est
- → réflexive.
- → symetrique.
- → transitive.

Relation d'ordre.

R est
- → réflexive
- → Antisymetrique.
- → transitive.

R est dite reflexive si : $\forall x \in E \ , \ x R x$

R est dite symetrique si : $\forall (x,y) \in E^2 \ ; \ x R y \Rightarrow y R x$

R est dite Antisymetrique si : $\forall (x,y) \in E^2 \ ; \ (x R y) \text{ et } (y R x) \Rightarrow x = y$

R est dite transitive si $\forall (x,y,z) \in E^3 \ (x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$

graphe de la relation :

$G = \{ (x,y) \in E \times F \ ; \ x R y \}$

Si x et y $\in$ au même ensemble E,
la relation est appelée Relation binaire
et ds ce cas G est une partie du produit $E \times E$.

(E,R) ensemble muni d'une Relation Binaire ;
f application de E ds F.

R est compatible avec l'appl. f si:

$\forall (x,y) \in E^2 , \ x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Id_E est l'appl. de E ds E definie par:

$\forall x \in E \ , \ id_E(x) = x$

$f : E \longrightarrow F$ est une application

→ f est dite injective si :

$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

→ f est dite surjective si

$\forall y \in F : \exists x \in E / f(x) = y$

→ f est dite bijective si elle est inj + surj

Hamza Zbatou

La loi $*$ est dite

- Commutative, si : $\forall (a,b) \in E^2 : a*b = b*a$
- Associative, si $\forall (a,b,c) \in E^3 : (a*b)*c = a*(b*c)$

On dit que $e \in E$ est un élément neutre

- à gauche pour la loi $*$; si $\forall a \in E$, $e*a = a$
- à droite pr la loi $*$, si $\forall a \in E$, $a*e = a$
- Pour la loi $*$, si $\forall a \in E$; $a*e = e*a = a$

On dit que a est un element **absorbant** pour la loi $*$, si $\forall b \in E$, $a*b = b*a = a$

Groupes :

$(G,*)$ est un groupe si la loi $*$ est $\begin{cases} \text{associative} \\ \text{Possède un élément neutre.} \\ \text{Symetrisable.} \end{cases}$

- $e^{-1} = e$ et $(x^{-1})^{-1} = x$.
- $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$, Plus generalement $(x_1 * x_2 * \dots * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * \dots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$

Homomorphisme de groupes :

$(E,*)$ et (F,T) deux groupes. $f : E \to F$ appl.

On dit que f est un **homomorphisme** (ou **morphisme**) si f respecte la structure des groupes :

$$\forall (a,b) \in E^2,\ f(a*b) = f(a)\,T\,f(b).$$

1- L'appl. f est un **isomorphisme** si f est un homomorphisme bijectif.

2- Si $E = F$ et f un homomorphisme alors f est dit un endomorphisme de E

3. Si $E = f$ et f un homomorphisme byectif alors f est dit un automorphisme de E

Hamza Ebatou

$(E,*)$ un monoïde :

→ $A \subset E$, A stable pr la loi $* \iff \forall (a,b) \in A^2, a*b \in A$

→ On dit que x est **symetrique**

- à droite, si $\exists x' \in E$, $x * x' = e$
- à gauche, si $\exists x'' \in E$, $x'' * x = e$

→ Lorsque l'élément est symetrisable à gauche et à droite (**bilatère**) et si $x' = x''$ on a alors :

$$x * x' = x' * x = e$$

→ Un élément est dit **régulier** (ou symplifiable)

- à gauche si : $\forall a,b \in E$, $x*a = x*b \Rightarrow a = b$
- à droite si : $\forall a,b \in E$, $a*x = b*x \Rightarrow a = b$

→ Un element est dit régulier si il est régulier à droite et à gauche.

Sous-groupes :

$(G,*)$ un groupe et H une partie non Vide de G.

Alors H est un sous groupe de G ssi :

$$\begin{cases} x*y \in H, \forall x,y \in H \\ x^{-1} \in H, \quad \forall x \in H \end{cases}$$

$$\iff x*y^{-1} \in H, \forall x,y \in H$$

→ On appele SG engendré par A, le SG $\langle A \rangle = \bigcap_{H \in S} H$ où S est : l'ensemble de tous les sous-groupe de G qui contient A.

Le sous-groupe $\langle A \rangle$ est ~~le~~ caractérisé par les deux condition suivantes :

- $\langle A \rangle$ est un sous-groupe de G contenant A.
- Si K est un autre sous-groupe de G contenant A on a $\langle A \rangle \subset K$.

$f : (E,*) \to (F,T)$ un homomorphisme de groupes e_E, e_F les elements neutres de E et F... alors

1- $f(e_E) = e_F$

2- $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3- $(f(E), T)$ est un sous groupe de (F,T)

$(E,+,\cdot)$ est $\mathbb{K}$-ev si :

i) $(E,+)$ est un groupe abelien, c.à.d :

$\forall x,y \in E : \quad x+y = y+x$

$\forall x,y,z \in E : (x+y)+z = x+(y+z)$

$\forall x \in E : \quad x + 0_E = x$

$\forall x \in E : \quad x + (-x) = 0_E$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall x,y \in E, \; \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \; \forall x \in E : (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

iV) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

V) $\forall x \in E : \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

H est un s-ev ssi :

i). $H \neq \emptyset$

ii). $\forall x,y \in H : \; x+y \in H$

iii). $\forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \; \alpha x \in H$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \; \alpha x + y \in H$

On dit que x est une combinaison linéaire d'une famille $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ d'élément de E si.

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tq $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

E un $\mathbb{K}$-ev

Une famille fine $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ d'element de E est libre (ou bien linéairement independante) Ssi $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

→ Une famille $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ est dite liées si $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ et $\exists i \in \{1..n\}$ tq $\alpha_i \neq 0$

→ Une famille est liée ssi elle n'est pas libre.

E un $\mathbb{K}$-ev et $B = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ une famille de vecteur de E.

B est une base de E si elle à la forme libre et génératrice de E.

---

dimension d'un e-v est le cardinal (nbr d'elements) d'une base quelconque de E.

$\left.\begin{array}{l}\dim E = n \\ B \text{ est libre dans } E\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{card} B \leq n$

$\left.\begin{array}{l}\dim E = n \\ B \text{ est libre ds } E \\ \operatorname{Card} B = n\end{array}\right\} \Rightarrow B$ est une base de E

$\left.\begin{array}{l}\dim E = n \\ \operatorname{Card} B \geq n+1\end{array}\right\} \Rightarrow B$ est liée

$\left.\begin{array}{l}\dim E = n \\ B \text{ est generatrice}\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Card} B \geq n$

$\left.\begin{array}{l}\dim E = n \\ B \text{ est generatrice} \\ \operatorname{Card} B = n\end{array}\right\} \Rightarrow B$ base de E

$\left.\begin{array}{l}H \text{ sev de } E \\ \dim H = \dim E\end{array}\right\} \Rightarrow H = E$

H et G deux s-ev de E. On a :

$\dim(H \oplus G) = \dim H + \dim G - \dim(H \cap G)$

$f : E \to F$ est une application linéaire ssi :

i) $\forall x,y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall x \in E : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x,y \in E$: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$f : E \to E$ une appl. ; E un $\mathbb{K}$-ev

→ f est un endomorphisme de E ssi f est liné

→ f est automorphisme ⇒ f est endomorphisme bij

$f : E \to F$ une appl. E, F un $\mathbb{K}$-ev

→ f est un isomorphisme de E sur F ssi : f est linéaire et bijective.

Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev est dit nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq : $f^n = 0$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ ou E, F sont deux $\mathbb{K}$-ev

→ $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$

→ $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$
$= rg(f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$

→ $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) / x \in E\} = \{y \in F / y = f(x) \text{ et } x \in E\} = f(E)$

→ $\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$

• f est inj ⇔ $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ • f est surj ⇔ $\operatorname{Im}(f) = F$

$rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$

- f est surj $\Leftrightarrow \forall y \in F \ \exists x \in E$ tq $y = f(x) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = f(E) = F$
- f est inj $\Leftrightarrow \forall x, y \in E \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
- f est bij $\Leftrightarrow \forall y \in F \ \exists! \ x \in E$ tq $y = f(x)$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$

$\dim E < \dim F \Rightarrow f$ n'est pas surj.

$\dim E > \dim F \Rightarrow f$ n'est pas bij

$\dim E = \dim F \Rightarrow \begin{cases} f \text{ inj} \\ f \text{ surj} \\ f \text{ bij} \end{cases}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin x \\ \cos(x+2\pi) = \cos x \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$:
$\Downarrow$
$- \tan(x+\pi) = \tan x$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$$

$- \tan(-x) = -\tan x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$- \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

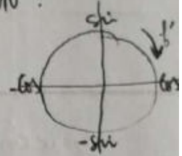
$- \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases}$

$- \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

$- \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \cos' x = -\sin x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \cos^{(n)} x = \cos(x + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

$\sin a + \sin b = 2 \sin(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$

$\sin a - \sin b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$

$\cos a + \cos b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$

$\cos a - \cos b = -2 \sin(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$

" sicoco
sicoco - sisi "

→ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

→ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

→ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

→ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

→ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta$

$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$

$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$; $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{-1}{\tan x}$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0 (\pi)$; $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} (\pi)$; $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} (\pi)$

$\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$: $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha (\pi)$. En particulier :

$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$
$= \frac{1}{\cos^2 x}$

$\text{Cotan}' x = -1 - \text{Cotan}^2 x$
$= \frac{-1}{\sin^2 x}$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$t = \tan \frac{x}{2}$

Utilisation du changement de variable.

→ $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

→ $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

→ $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$

Hamza Ebatou

Scanned by CamScanner

Linéarisation :

$$-\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$-\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
Formules d'Euler

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \\ \sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \end{cases}$$

arcsin $: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$x \longrightarrow \arcsin x$

$\rightarrow \begin{cases} \sin x = y \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin y = x \\ y \in [-1,1] \end{cases}$

$\rightarrow$ $x \rightarrow \arcsin x$ est strictement $\nearrow$, impaire : ($\forall x \in [-1,1] : \arcsin(-x) + \arcsin(x) = 0$)

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : -\frac{\pi}{2} < \arcsin < \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : \sin(\arcsin x) = x$

$\rightarrow \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \arcsin(\sin x) = x$

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$\rightarrow \forall x \in]-1,1[: \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]-1,1[: \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin + C^{te}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

arccos $: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$
$x \longrightarrow \arccos x$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = y \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos y \\ y \in [-1,1] \end{cases}$

$\rightarrow$ $x \rightarrow \arccos x$ est une fct continue et strictement décroissante

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : \arccos x \in [0,\pi]$

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : \cos(\arccos x) = x$

$\rightarrow \forall x \in [0,\pi] : \arccos(\cos x) = x$

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\rightarrow \forall x \in [-1,0[\cup]0,1] : \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\forall x \in]-1,1[:$
$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

arctan $: \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$x \longrightarrow \arctan x$

$x \mapsto \arctan x$ est continue, impaire, strictement croissante, decroissante.

$\forall x \in \mathbb{R} : \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{-\pi}{2}$

$\rightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \arctan(\tan x) = x$

$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x$

$- \forall x \in [-1,1] : \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$- \forall x \in [-1,1] : \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

$- \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$

arccot $: \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$

$x \longmapsto \text{arccot}(x)$ est une bijection strictement $\searrow$

$\begin{cases} \cot x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{arccot}\, y \\ y \in]0,\pi[\end{cases}$

$\text{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad : \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{Cot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow \text{Cot}\, x$

Continue, derivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$ et de plus périodique de periode 2π

$\tilde{h} :]0,\pi[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow \text{Cot}\, x$

$\tilde{h}$ continue sur $I =]0,\pi[$ strictement $\searrow$ sur I.

$\lim_{0^+} \tilde{h}(x) = +\infty$

$\lim_{\pi^-} \tilde{h}(x) = -\infty$

$\tilde{h}(I) = \mathbb{R}$

l'appl $\tilde{h}$ est une bij.

$\forall x,y \in \mathbb{R} : |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

$\forall x,y \in \mathbb{R} : |x|-|y| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$

$\forall x,y \in \mathbb{R} : ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$

$\forall x,y \in \mathbb{R} ; |x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow xy \geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ x et y ont le m̂ signe.

- $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} E(x) \leqslant x < E(x)+1 \\ x-1 \leqslant E(x) < x \end{cases}$
- $E(x+m) = E(x) + m, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$
- $E(-x) = -E(x) - 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

• f est periodique,

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, \ x+p \in D_f \ . \\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$

• f est monotone si elle est ou bien croissante ou bien decroissante.

• f est croissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, \ x_2 \geqslant x_1 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$

• f est décroissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, \ x_2 \geqslant x_1 \Rightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1)$

→ l'inverse de f, pour une fonction f non nulle sur I :

$\forall x \in I, \ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$

→ Une relation d'ordre.

$f \leqslant g$ sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, \ f(x) \leqslant g(x)$

→ f admet une limite l, lorsque $x \to x_0$ ssi :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_\varepsilon > 0 \ / \ |x-x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

→ $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\Leftrightarrow \forall K > 0, \ \exists \eta_K > 0 / \ |x-x_0| < \eta_K \Rightarrow f(x) > K$

→ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists K > 0 \ / \ x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

→ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Leftrightarrow \forall K > 0, \ \exists M > 0 \ / \ x > M \Rightarrow f(x) > K$

Limites usuelles :

* $\forall n \in \mathbb{N}^*; \ \lim_{0} x^n = 0$
* $\forall n \in \mathbb{N}^*; \ \lim_{0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
* $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \lim_{0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n = 2p \\ -\infty \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$
* $\lim_{0^+} \ln x = -\infty$
* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+}, \ \lim_{0^+} x^\alpha \ln x = \infty$
* $\lim_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
* $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
* $\lim_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
* $\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$
* $\lim_{-\infty} e^x = 0^+$
* $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
* $\lim_{-\infty} x^n e^x = 0^-$
* $\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
* $\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$
* $\lim_{0} \frac{\tan x}{x} = 1$
* $\lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
* $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{x} = +\infty$
* $\lim_{\frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{x} = -\infty$

Théorème des valeurs Intermédiaires :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} - f \text{ continue} \\ - f(a) \leqslant f(b) \end{array}\right\} \forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x \in [a,b] \ / \ f(x) = y$

$\left.\begin{array}{l} - f \text{ continue} \\ - f(a) \geqslant f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall y \in [f(b), f(a)] : \exists x \ [a,b] \ / \ f(x) = y$

Théorème de Bolzano :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} - f \text{ est continue} \\ - f(a) \times f(b) \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \ / \ f(\alpha) = 0$

$D \subset \mathbb{R}$; $f : D \to \mathbb{R}$ * On dit que f est uniformément continue sur D si :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x, x' \in D, \ |x-x'| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$

* On dit Que f est :

→ K-lipschitzienne sur D si $\forall x, x' \in D \ |f(x) - f(x')| \leqslant K|x-x'|$

→ K-contractante sur D si f est K-lipschitzienne et $K \in [0,1[$

Théorème "Heine" :

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. / $f : I \to \mathbb{R}$ appl. continue sur I.

$\Rightarrow f$ est uniformément continue sur I

f est K-lipschitzienne sur D

$\Rightarrow f$ est uniformement continue sur D.

- f continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in \mathbb{R} \ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$
- $\forall x \in \mathbb{Q} : \exists a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tq $\lim a_n = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \exists r_n \in \mathbb{Q}$ tq $\lim r_n = x$
- $\mathbb{R}$ est archimedien C-à-d : $\forall x > 0, \ \forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}^* ; \ nx \geqslant y$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q} : x < a < y$

Si on a (U_n) et (V_n) 2 suites adjacentes,
On pose que $(U_n)\nearrow$ et $(V_n)\searrow$

1/. $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < V_n$; $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$; $U_p \leq V_q$

2/. (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers m̂ limite.

3/. Si $\lim U_n = \lim V_n$, on a $U_n < l < V_n$

Une suite réelle $(U_n)_{n\geq 0}$ est dite <u>suite de Cauchy</u> si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, \forall m > N ; |U_m - U_n| < \varepsilon$$

→ (U_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, \forall p > 0, |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$

Une suite (réelle ou complexe) est convergente ssi elle est de Cauchy.

<u>Suites (U_n) tq $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$</u> :

$ab \neq 0$

L'expression de (U_n) ds le cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$ dépend des solution de l'equation du second degré.

$$(E) : r^2 - ar - b \quad (r \in \mathbb{C})$$

$\Delta = a^2 + 4b$

$\Delta > 0$

$$\boxed{U_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n}$$

On determine les Cte λ_1 et λ_2 en resolvant le système :

$$\begin{cases} U_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ U_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases}$$

$\Delta < 0$

$r_1 = r_2 = \varphi e^{i\theta}$

$$\boxed{U_n = \ell^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))}$$

les Cte A et B sont obtenus en résolvant le système :

$$\begin{cases} U_0 = A \\ U_1 = \ell(A\cos\theta + B\sin\theta) \end{cases}$$

$\Delta = 0$

$r = \frac{a}{2}$

$$U_n = r^n(\lambda_1 + \lambda_2 n)$$

λ_1 et λ_2 sont déterminée en resolvant le système :

$$\begin{cases} U_0 = \lambda_1 \\ U_1 = r(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

$U_n \sim V_n \iff \exists (\beta_n)$ tq : $\begin{cases} \lim \beta_n = 1 \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \\ U_n = \beta_n V_n \end{cases}$

1- $U_n \sim V_n \iff V_n \sim U_n$

2- $\begin{cases} U_n \sim V_n \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \iff \alpha U_n \sim \alpha V_n$

3- $\begin{cases} U_n \sim V_n \\ X_n \sim Y_n \end{cases} \implies U_n X_n \sim V_n Y_n$

4- $\begin{cases} U_n \sim V_n \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, U_n \neq 0 \end{cases} \iff \frac{1}{U_n} \sim \frac{1}{V_n}$

5- $\begin{cases} U_n \sim V_n \\ \forall m \in \mathbb{N}^* \end{cases} : U_n^m \sim V_n^m$

<u>Suites (U_n) tq $U_n = f(U_{n-1})$</u> :

$D_f = I \subset \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow f(I) \subset I \\ \rightarrow (\forall x \in I) : |f'(x)| \leq K < 1 \end{array}\right\} \implies (U_n) : \begin{cases} U_0 \in I \\ U_n = f(U_{n-1}) \end{cases}$ est convergente vers l

tq l est l'unique solution de l'équation $f(x) = x \quad \forall x \in I$

Hamza Ebatou

Développements limités usuels

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$\frac{x^3}{3}$

Formulaire sur les fonctions circulaires et hyperboliques

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$
$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2.\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2.\sin^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$
$$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$
$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$
$$avec\, t = \tan\frac{x}{2}\begin{cases}\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}\\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$$
$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$cotan' x = -1 - cotan^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$Arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1)$$
$$Arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1)$$
$$Arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$Arccotan' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b$$
$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b$$
$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b.\mathrm{ch}\, a$$
$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, b.\mathrm{ch}\, a$$
$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a.\mathrm{th}\, b}$$
$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a.\mathrm{th}\, b}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\, 2a &= 2.\mathrm{ch}^2 a - 1\\ &= 1 + 2.\mathrm{sh}^2 a\\ &= \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a\end{aligned}$$
$$\mathrm{sh}\, 2a = 2.\mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, a$$
$$\mathrm{th}\, 2a = \frac{2\,\mathrm{th}\, a}{1+\mathrm{th}^2 a}$$
$$\mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)]$$
$$\mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)]$$
$$\mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)]$$
$$\mathrm{ch}\, p + \mathrm{ch}\, q = 2.\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{ch}\, p - \mathrm{ch}\, q = 2.\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}.\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{sh}\, p + \mathrm{sh}\, q = 2.\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{sh}\, p - \mathrm{sh}\, q = 2.\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}.\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}$$
$$avec\, t = \mathrm{th}\frac{x}{2}\begin{cases}\mathrm{ch}\, x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}\\ \mathrm{sh}\, x &= \frac{2t}{1-t^2}\\ \mathrm{th}\, x &= \frac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$
$$\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$$
$$\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x$$
$$\mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$
$$coth' x = 1 - coth^2 x = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$$
$$Argch' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1)$$
$$Argsh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$Argth' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x|<1)$$
$$Argcoth' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x|>1)$$